

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Vérifier si les espaces suivants sont supplémentaires dans $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(x \mapsto 1, \text{id}_{\mathbb{R}})$$

Solution : Il est clair que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Il est aussi facile de montrer que $F \cap G = \{0\}$. En effet, si $f \in F \cap G$ alors f est une fonction affine qui s'annule en 0 et dont la dérivée s'annule aussi en 0. f est donc nécessairement identiquement nulle. Par ailleurs, si $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors notant $g : x \mapsto h'(0)x + h(0)$, on a $h - g \in F$ ce qui montre que $E = F \oplus G$.

Références