

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

On considère dans $E = \mathbb{R}_4[X]$ les sous-ensembles $\mathcal{P} = \{P \in E \mid P \text{ est pair}\}$ et $\mathcal{I} = \{P \in E \mid P \text{ est impair}\}$.

1. Soit $P \in E$. Montrer que $P \in \mathcal{P}$ si et seulement si les coefficients de ses termes de degré impair sont nuls.
2. Soit $P \in E$. Montrer que $P \in \mathcal{I}$ si et seulement si les coefficients de ses termes de degré pair sont nuls.
3. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{I} sont des sous-espaces vectoriels de E .
4. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Solution :

1. Supposons que $P = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ avec $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Si P est pair alors $P(-X) = P(X)$ et $a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = a_4X^4 - a_3X^3 + a_2X^2 - a_1X + a_0$ donc $a_3X^3 + a_1X = 0$ ce qui amène $a_3 = a_1 = 0$ car un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls. Les coefficients des termes de degré impair de P sont donc bien nuls. Réciproquement, on vérifie facilement que si $a_3 = a_1 = 0$ alors P est pair.
2. Même raisonnement que dans la question précédente.
3. On tire des deux premières questions que $\mathcal{P} = \text{Vect}(1, X^2, X^4)$ et $\mathcal{I} = \text{Vect}(X, X^3)$. Ces deux ensembles sont donc des sous-espaces vectoriels de E .
4. Soit $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. Alors les coefficients des termes de degré pair et les coefficients des termes de degré impair de P sont nuls. Donc P est nul et \mathcal{P}, \mathcal{I} sont en somme directe. Si $P = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in E$ alors

$$P = \underbrace{a_4X^4 + a_2X^2 + a_0}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{a_3X^3 + a_1X}_{\in \mathcal{I}}$$

donc $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. En conclusion, $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Références