Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $F = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s+t=0\right\}$ *et* $G = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s-t=0\right\}$. *Prouver que* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Solution : *On vérifie que* $F = Vect\,(1,-1)$ *et que* $G = \mathrm{Vect}\,(1,1)$ *donc ce sont deux sous-espace vectoriels de* $\mathbb{R}^2$. *Si* $(x,y) \in F \cap G$ *alors ce couple vérifie le système* $\begin{cases} s+t &= 0 \\ s-t &= 0 \end{cases}$ *dont l'unique solution est* $(0,0)$ *donc* $F \cap G = \{0\}$. *Pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *cherchons* $(s,t) \in F$ *et* $(s',t') \in G$ *en sorte que* $(x,y) = (s,t) + (s',t')$. *On doit avoir :*

$$\begin{cases} s+s' &= x \\ t+t' &= y \\ s+t &= 0 \\ s'-t' &= 0 \end{cases}.$$

On résout ce système et on trouve $(s,t) = \frac{1}{2}(x-y,-x+y)$ *et* $(s',t') = \frac{1}{2}(x+y,x+y)$. *En conclusion,* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Références