Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. On pose $A = E \setminus F$.

1. *Montrer que $\forall x \in F$, $\forall y \in A$, $x + y \in A$.*
2. *En déduire que si $F \neq E$, alors $\mathrm{Vect}(A) = E$.*

Solution :

1. *Soit $x \in F$ et $y \in A$. Par l'absurde, si $x + y \notin A$, alors $x + y \in F$ et il existe $f \in F$ tel que $x + y = f$ mais alors $y = f - y \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel), ce qui n'est pas possible.*
2. *Supposons que $F \neq E$. Par conséquent, il existe $y \in A$. Montrons alors que $E \subset \mathrm{Vect}(A)$. Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \in \mathrm{Vect}(A)$. Supposons donc que $x \notin A$. Alors $x \in F$ et d'après 1. , $x + y \in A$. On écrit alors*
$$x = (x + y) - y$$
Et donc x est combinaison linéaire des vecteurs $(x + y)$ et y qui appartiennent à A. Par conséquent, $x \in \mathrm{Vect}(A)$.

Références