Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient A, B et C trois points du plan. Montrer que :

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$$

1. *En raisonnant géométriquement.*
2. *En utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit scalaire*

Solution :

1. *Orientons le triangle ABC dans le sens direct. On peut choisir une détermination dans $[0,\pi]$ pour les trois angles $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)$. Les trois déterminants sont alors positifs et sont de plus chacun égaux au double de l'aire du triangle ABC, ce qui prouve les égalités.*
2. *D'après la relation de Chasles et en utilisant la bilinéarité et l'antisymétrie du produit scalaire :*

$$\begin{aligned}\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) &= \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\\ &= \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)+\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\\ &= -\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\\ &= \det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right).\end{aligned}$$

On prouve de même la dernière égalité.

Références