Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $Vect\left(\mathscr{F}\right)$ *:*

1. $F_1 = \left\{f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \mid f' - 2tf = 0\right\}$
2. $F_2 = \left\{f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \mid f'' + \omega^2 f = 0\right\}$ *où* $\omega \in \mathbb{R}_+^*$
3. $F_3 = \left\{f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \mid f'' + 2f' + f = 0\right\}$
4. $F_4 = \left\{f \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \mid f'' - 4f = 0\right\}$

Solution :

1. *Les fonctions solutions de* $y' - ty = 0$ *sont les fonctions* $\varphi_\alpha : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{t^2} \end{array}\right.$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$*.Donc* $F_1 = Vect\left(\varphi_1\right)$*.*
2. *Les fonctions solutions de* $f'' + \omega^2 f = 0$ *sont les fonctions* $\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha\cos\left(\omega t\right) + \beta\sin\left(\omega t\right) \end{array}\right.$ *où* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Donc* $F_2 = Vect\left(t \mapsto \cos\left(\omega t\right), t \mapsto \sin\left(\omega t\right)\right)$*.*
3. *Les fonctions solutions de* $f'' + 2f' + f = 0$ *sont les fonctions* $\varphi_{\alpha,\beta} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \alpha e^{-t} + \beta t e^{-t} \end{array}\right.$ *où* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Donc* $F_3 = Vect\left(t \mapsto e^{-t}, t \mapsto te^{-t}\right)$*.*
4. *On montre de même que* $F_4 = Vect\left(t \mapsto e^{2t}, t \mapsto e^{-2t}\right)$*.*

Références