Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels en les décrivant sous la forme $Vect(\mathscr{F})$ *:*

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X]$
2. $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$
3. $F_3 = \{P' \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ *où* $n \in \mathbb{N}$
4. $F_4 = \left\{a\left(X^3-1\right) + b\left(X^2-2\right) + c(X+4) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$
5. $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$
6. $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P' = 0\}$
7. $F_7 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'' = 0\}$
8. $F_8 = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$

Solution :

1. $F_1 = \mathbb{R}_2[X] = Vect\left(X^2, X, 1\right)$.
2. $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\} = \{(X-1)P \mid P \in \mathbb{R}_2[X]\} = Vect\big((X-1)X^2, (X-1)X, (X-1)1\big)$.
3. $F_3 = \{P' \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\} = R_{n-1}[X] = Vect\left(1, X, \dots, X^{n-1}\right)$.
4. $F_4 = \left\{a\left(X^3-1\right) + b\left(X^2-2\right) + c(X+4) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = Vect\left(X^3-1, X^2-2, X+4\right)$.
5. $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(1) = P(2) = 0\} = \{(X-1)(X-2)P \mid P \in \mathbb{R}_2[X]\}$
   $= Vect\left(X^2(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2), (X-1)(X-2)\right)$.
6. $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P' = 0\} = Vect(1)$.
7. $F_7 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'' = 0\} = \{aX+b | a,b \in \mathbb{R}\} = Vect(X, 1)$.
8. *Soit* $P = aX^2 + bX + c \in F_8$ *où* $a,b,c \in \mathbb{R}$. *On a :* $\int_0^1 P(t)\,dt = 0$ *si et seulement si* $2a + 3b + 6c = 0$. *Donc* $F_8 = \left\{aX^2 + bX + c \mid a,b,c \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad 2a+3b+6c = 0\right\} = \left\{aX^2 + bX - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} = Vect\big(X^2 - \frac{1}{3}, X - \frac{1}{2}\big)$.

Références