Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 juin 2022

Exercice 0.1 ★ _Pas de titre_

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ en les décrivant sous la forme $Vect(\mathscr{F})$:

1. $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\right\}$
2. $F_2 = \left\{(2s+t, s-t, s+t) \ \mid \ (s,t) \in \mathbb{R}^2\right\}$
3. $F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0 \quad \text{et} \quad x+y-z=0\right\}$
4. $F_4 = F \cap G$ avec $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0\right\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x-y-z=0\right\}$
5. $F_5 = \{(2t, 3t, t) \ \mid t \in \mathbb{R}\}$

Solution :

1. $F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\right\} = \left\{(x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\,(1,0,1) + y\,(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \in \mathbb{R}\right\} = Vect((1,0,1),(0,1,1))$.
2. $F_2 = \left\{(2s+t, s-t, s+t) \ \mid \ (s,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{s\,(2,1,1) + t\,(1,-1,1) \ \mid \ (s,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = Vect\left((2,1,1),(1,-1,1)\right)$.
3. $F_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0 \quad \text{et} \quad x+y-z=0\right\} = \left\{(0,y,y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left((0,1,1)\right)$.
4. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x-y-z=0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y-2z=0 \quad \text{et} \quad 3x-y-z=0\right\}$
   $= \left\{(x,5x,-2x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left((1,5,-2)\right)$.
5. $F_5 = \{(2t,3t,t) \ \mid t \in \mathbb{R}\} = Vect\left((2,3,1)\right)$.

Références