Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et trois sous-espaces F, G et H de E. On suppose que

$$\begin{cases} F+G=F+H \\ F\cap G=F\cap H \\ G\subset H \end{cases}$$

A-t-on toujours $G=H$?

Solution : *Montrons que $G=H$. On sait déjà que $G\subset H$. Il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque. Soit $h\in H$. Alors $h\in F+H=F+G$. Donc il existe $f\in F$ et $g\in G$ tels que $h=f+g$. Mais comme $f=h-g$, que $h-g\in H$ (car $h\in H$, $g\in G\subset H$ et H est un sous-espace vectoriel) alors $f\in F\cap H=F\cap G$. Donc $f\in G$ et $h=f+g\in F$. Ce qui prouve que $H\subset F$. En conclusion $H=G$.*

Références