Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et quatre sous-espaces vectoriels A, B, C et D de E. Montrer que

1. $A \cap (B+C) = A\cap B + A\cap C$.
2. $A + \big(B\cap (A+C)\big) = (A+B)\cap(A+C)$;
3. $A \cap \big(B + (A\cap C)\big) = (A\cap B) + (A\cap C)$.
4. $A\cap B = C\cap D \Rightarrow \big(A+(B\cap C)\big)\cap\big(A+(B\cap D)\big) = A$;

Solution :

1. *Considérons $z \in A\cap B + A\cap C$. Il existe $x\in A\cap B$ et $y \in A\cap C$ tels que $z = x+y$. Mais comme $x, y \in A$ et que A est un sous-espace vectoriel, $z\in A$. Comme $x\in B$ et $y \in C$, $z = x+y\in A+C$. En conclusion, $z\in A\cap(B+C)$. Réciproquement, si $z\in A\cap(B+C)$ alors $z\in A$ et il existe $x\in B$ et $y\in C$ tels que $z = x+y$.*
2. *D'après la question précédente, $(A+B)\cap(A+C) = A\cap A + A\cap C + B\cap A + B\cap C = A + A\cap B + A\cap C + B\cap C = A + B\cap C$ car A est un sous-espace vectoriel et $A\cap B, A\cap C\subset A$. De même, $A + \big(B\cap(A+C)\big) = A + (A\cap B + B\cap C) = A + B\cap C$. On en déduit l'égalité.*
3. *Toujours d'après la première question $A\cap\big(B+(A\cap C)\big) = A\cap B + A\cap A\cap C = A\cap B + A\cap C$ et $A\cap\big(B+(A\cap C)\big) = (A\cap B)+(A\cap C)$.*
4. *Supposons que $A\cap B = C\cap D$. Alors*

$$\big(A+(B\cap C)\big)\cap\big(A+(B\cap D)\big) = A\cap A + \underbrace{A\cap B}_{C\cap D}\cap D + \underbrace{A\cap B}_{C\cap D}\cap C + B\cap\underbrace{C\cap D}_{A\cap B} = A + C\cap D + A\cap B = A + A\cap B = A$$

car A est un sous-espace vectoriel et que $A\cap B\subset A$.

Références