Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et l'on note $\mathcal{V}$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E. On se donne un sous-espace vectoriel $V \in \mathcal{V}$ et l'on définit l'application

$$\varphi_V : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{V}(E) & \longrightarrow & \mathcal{V}(E) \\ X & \longmapsto & X+V \end{array} \right.$$

Montrer que

$$(i) \quad \varphi_V \text{ injective } \iff (ii) \quad \varphi_V \text{ surjective } \iff (iii) \quad V = \{0_E\}$$

Solution :

1. *$(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (ii)$ sont claires puisque si $V = \{0_E\}$, $\varphi_V = \mathrm{id}_{\mathcal{V}(E)}$.*
2. *$(i) \Rightarrow (iii)$: par l'absurde, si $V \neq \{0_E\}$, il existe $v \in V$ tel que $v \neq 0_E$. En prenant $X_1 = \{0_E\}$ et $X_2 = \mathrm{Vect}(v)$, on aboutit à une contradiction car $\varphi(X_1) = V = \varphi(X_2)$.*
3. *$(ii) \Rightarrow (iii)$: par l'absurde, si $V \neq \{0_E\}$, il existe $v \in V$ avec $v \neq 0_E$. En posant $Y = \{0\}$, on ne lui trouve pas d'antécédent par φ_V.*

Références