Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et l'on note $\mathcal{V}(E)$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E. On se donne un sous-espace vectoriel $V \in \mathcal{V}(E)$ et l'on définit l'application

$$\varphi_V : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{V}(E) & \longrightarrow & \mathcal{V}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap V \end{array} \right.$$

Montrer que

$$(i) \quad \varphi_V \text{ injective} \iff (ii) \quad \varphi_V \text{ surjective} \iff (iii) \quad V = E$$

Solution :

1. *$(i) \Rightarrow (iii)$: il suffit de prendre $X_1 = E$ et $X_2 = V$. Alors comme $\varphi(X_1) = \varphi(X_2) = V$ et que φ est injective, $X_1 = X_2$, c'est-à-dire $V = E$.*
2. *$(iii) \Rightarrow (i)$: le résultat est clair car dans ce cas $\varphi_E = \mathrm{id}$.*
3. *$(ii) \Rightarrow (iii)$: comme $E \in \mathcal{V}(E)$ et que φ est surjective, il possède un antécédent $X \in \mathcal{V}(E)$ et l'égalité $X \cap V = E$ n'est possible que si $V = E$.*
4. *$(ii) \Rightarrow (i)$: clair car dans ce cas $\varphi_E = \mathrm{id}$.*

Références