Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 juin 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Développer :

1. $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2$.
2. $\det(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$

Solution :

1. *Comme le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, on a, pour tous vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ du plan :*
   $\|\overrightarrow{a}\|^2-\left\|\overrightarrow{b}\right\|^2=\left\langle\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right\rangle$ *donc*
   $$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 &= \left\langle 2\overrightarrow{u}|2\overrightarrow{b}\right\rangle\\ &= 4\left\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\right\rangle\end{aligned}$$
2. *De même, comme le déterminant est une forme bilinéaire anti-symétrique alternée, il vient :*
   $$\det(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = 2\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

Références