

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Solution :

- \Rightarrow Supposons que $F \not\subset G$ et que $G \not\subset F$. On peut alors trouver deux vecteurs non nuls $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. $x + y$ ne peut être élément de $F \cup G$: sinon on aurait $x + y \in F$ (ou $x + y \in G$) et donc, F étant stable par combinaison linéaire $y = x + y - x$ serait élément de F (on fait le même raisonnement si $x + y \in G$) ce qui n'est pas possible par hypothèse. Par conséquent $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E . La première implication est ainsi prouvée par contraposée.
- \Leftarrow Trivial.

Références