Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel A de E. On suppose que $A \neq \{0_E\}$ et $A \neq E$. Montrer que la partie $B = (E \setminus A) \cup \{0_E\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Solution : *Par l'absurde, supposons que B est un sous-espace vectoriel de E. Soient $a \in A$ et $b \in B$ deux vecteurs non nuls. Posons $x = a + b$. Comme E est un espace vectoriel, x est élément de E et comme $E = A \cup B$, soit $x \in A$, soit $x \in B$. Si $x \in A$ alors $b = x - a$ est élément de A car A est un sous-espace vectoriel. Mais $A \cap B = \{0\}$ donc $b = 0$ ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ. De même, si $x \in B$ alors $a = x - b \in B$ et $a = 0$ ce qui est aussi une contradiction. En conclusion, B ne peut être un sous-espace vectoriel de E.*

Références