Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$ *et* $G = \{(s-t, s+t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$.

1. *Montrer que* F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Déterminer* $F \cap G$.

Solution : *Rappelons qu'une partie de* $\mathbb{R}^3$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si c'est le singleton* $\{0\}$*, une droite vectorielle, un plan vectoriel ou* $\mathbb{R}^3$ *tout entier.*

1. F *est une partie non vide de* $\mathbb{R}^3$. *Si* $(x,y,z), (x',y',z') \in F$ *et si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *alors on vérifie facilement que le triplet* $\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z')$ *vérifie l'équation* $x+y+z=0$. F *est donc stable par combinaison linéaire et forme un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *(on aura reconnu que* F *est un plan vectoriel de l'espace). On vérifie aussi que* G *est un sous-ensemble non vide de* $\mathbb{R}^3$ *et si* $(s-t, s+t, t)$ *et* $(s'-t', s'+t', t')$ *sont deux éléments de* G *(avec* $s, s', t, t' \in \mathbb{R}$*) et si alors* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *alors :*

$$\alpha(s-t, s+t, t) + \beta(s'-t', s'+t', t') = (S-T, S+T, T)$$

avec $S = \alpha s + \beta s'$ *et* $T = \alpha t + \beta t'$ *et donc* G *est aussi stable par combinaison linéaire (On aura là encore remarqué que* G *est un plan vectoriel de l'espace).*

2. *Pour déterminer* $F \cap G$ *il suffit de résoudre le système* $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=s-t \\ y=s+t \\ z=t \end{cases}$ *et on obtient comme ensemble solution celui paramétré par :* $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}t \\ y = \dfrac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ *(on reconnait l'équation paramétrée d'une droite vectorielle).*

Références