Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

1. $F_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y \geqslant 0\right\}$
2. $F_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$
3. $F_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\right\}$
4. $F_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 3\right\}$

Solution : *Rappelons qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si c'est le singleton $\{0\}$, une droite vectorielle ou $\mathbb{R}^2$ tout entier.*

1. *Le couple $(0, 1)$ est élément de F_1 mais ce n'est pas le cas du couple $(0, -1)$ qui lui est pourtant colinéaire. F_1 n'est donc pas stable par combinaison linéaire et ce ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Le couple nul $(0, 0)$ n'est pas élément de F_2 et donc F_2 ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*
3. *On vérifie facilement que F_3 est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. Si $(x, y), (x', y') \in F_3$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors on vérifie facilement que $\alpha x + \beta x' = \alpha y + \beta y'$ et donc que $\alpha (x, y) + \beta (x', y') \in F_3$. F_3 est donc un sous-espace vectoriel de R^2.*
4. *Le couple nul $(0, 0)$ n'est pas élément de F_4 et donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.*

Références