Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

11 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

On note $E = \mathscr{S}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$?

1. $F_1 = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est bornée } \}$
2. $F_2 = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est monotone } \}$
3. $F_3 = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est convergente } \}$
4. $F_4 = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est convergente vers } 0 \}$
5. $F_5 = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est convergente vers } l \}$ où l est un réel fixé non nul.
6. $F_6 = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est divergente } \}$
7. $F_7 = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est géométrique } \}$
8. $F_8 = \{(u_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \mid (u_n) \text{ est géométrique de raison } a \}$ où a est un réel fixé.

Solution :

1. *Une combinaison linéaire de suites bornées étant encore bornée, on vérifie facilement que F_1 est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *En considérant par exemple les suites (u_n) et (v_n) de terme général $u_n = n^2$ et $v_n = 4n - 1$ on vérifie que (u_n) et (v_n) sont croissantes mais que $u_n - v_n$ n'est pas monotone (il suffit de calculer les 4 premiers termes de cette suite). F_2 n'est donc pas stable par combinaison linéaire et ne forme donc pas un sous-espace vectoriel de E.*
3. *L'ensemble F_3 est clairement une partie non vide de E. Par le théorème d'opérations sur les limites, on sait qu'une combinaison linéaire de suites convergentes est encore convergente. Donc F_3 est un sous-espace vectoriel de E.*
4. *L'ensemble F_4 est une partie non vide de E. Par le théorème d'opérations sur les limites, on sait qu'une combinaison linéaire de suites convergentes vers 0 est encore convergente vers 0. Donc F_3 est un sous-espace vectoriel de E.*
5. *La suite nulle ne converge pas vers $l \neq 0$ et donc F_5 ne peut être un sous-espace vectoriel de E.*
6. *La suite nulle n'est pas divergente et donc n'appartient pas à F_6 qui ne peut du coup être un sous-espace vectoriel de E..*

7. *Une combinaison linéaire de suites géométriques n'est pas forcément géométrique donc* F_7 *n'est pas un sous-espace vectoriel de* E.
8. *L'ensemble* F_8 *est une partie non vide de* E. *On vérifie facilement qu'un combinaison linéaire de suites de raison* a *est encore une suite géométrique de raison* a *et* F_8 *est donc un sous-espace vectoriel de* E.

Références