Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On note $E = \mathscr{F}([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

1. $F_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \mid f'(0) = f'(1) \right\}$
2. $F_2 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [0,1], \quad f \geqslant 0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\, dt = 1 \right\}$
4. $F_4 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\, dt = 0 \right\}$

Solution :

1. *L'ensemble F_1 est clairement un sous-ensemble de E. F_1 est non vide car il contient la fonction nulle. Soient $f, g \in F_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ est encore $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $(\alpha f + \beta g)'(0) = (\alpha f + \beta g)'(1)$. F_1 est donc bien un sous-espace vectoriel de E.*
2. *Une combinaison linéaire de fonctions positives n'est pas forcément positive. Il s'ensuit que F_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
3. *L'intégrale entre 0 et 1 de la fonction nulle est nulle. Cette fonction n'est donc pas élément de F_3 et F_3 ne peut être un sous-espace vectoriel de E.*
4. *L'ensemble F_4 est clairement une partie non vide de E. De plus, une combinaison linéaire de fonctions d'intégrales nulles est d'intégrale nulle et si $f, g \in F_4$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors, par linéarité de l'intégrale : $\int_0^1 (\alpha f + \beta g)(t)\, dt = \alpha \int_0^1 f(t)\, dt + \beta \int_0^1 g(t)\, dt = 0$. F_4 est donc bien stable par combinaison linéaire et c'est bien un sous-espace vectoriel de E.*

Références