Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les parties suivantes sont elles des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. *L'ensemble F_1 des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'ensemble F_2 des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$.*
3. *L'ensemble F_3 des fonctions qui s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$.*
4. *L'ensemble F_4 des fonctions qui ne s'annulent jamais sur $\mathbb{R}$.*
5. *L'ensemble F_5 des fonctions qui s'annulent une infinité de fois sur $\mathbb{R}$.*
6. *L'ensemble F_6 des fonctions qui valent 0 en 1.*
7. *L'ensemble F_7 des fonctions qui valent 1 en 0.*
8. *L'ensemble F_8 des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.*
9. *L'ensemble F_9 des fonctions paires sur $\mathbb{R}$.*
10. *L'ensemble F_{10} des fonctions T-périodiques où T est un réel strictement positif fixé.*

Solution :

1. *Une combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée. F_1 est non vide donc F_1 est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *On considère les fonctions $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$ et $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$. f_1 et f_2 sont monotones (croissantes) mais ce n'est pas le cas de $f_1 - f_2$ comme on peut le vérifier facilement. F_2 n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.*
3. *On considère les fonctions $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ et $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array} \right.$. f_1 et f_2 s'annulent toute deux au moins une fois sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas le cas de $f_2 - f_1$. Donc F_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
4. *La fonction nulle n'est pas élément de F_4 donc F_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

5. Les fonctions $f_1 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}\right.$ et $f_2 : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x - \frac{1}{2} \end{array}\right.$ s'annulent une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas le cas de $f_1 - f_2 = \frac{1}{2}$. F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
6. On montre facilement que F_6 est un sous-espace vectoriel de E.
7. La fonction nulle n'est pas dans F_7. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
8. Une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable et F_8 est non vide donc F_8 est un sous-espace vectoriel de E.
9. F_9 est non vide. Si f et g sont deux fonctions paires et si α, β sont deux scalaires réels alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$(\alpha f + \beta g)(-x) = (\alpha f + \beta g)(x)$$
et donc F_8 est stable par combinaison linéaire. On en déduit que c'est un sous-espace vectoriel de E.
10. On vérifie facilement que F_{10} est non vide et qu'une combinaison linéaire de fonctions T-périodiques est encore T-périodique. F_{10} est donc un sous-espace vectoriel de E.

Références