Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 juillet 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Indiquer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1. *L'ensemble F_1 des fonctions polynomiales de degré n où $n \in \mathbb{N}$.*
2. *L'ensemble F_2 des fonctions polynomiales de degré au plus n où $n \in \mathbb{N}$ et à coefficients dans $\mathbb{R}$.*
3. *L'ensemble F_3 des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.*
4. *L'ensemble F_4 des fonctions f vérifiant telles qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f est k-lipschitzienne.*
5. *L'ensemble F_5 des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 1$*
6. *L'ensemble F_6 des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$*
7. *L'ensemble F_7 des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ solutions de $y' - y = 0$.*
8. *L'ensemble F_8 des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ solutions de $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - y(t) = t$.*

Solution :

1. *L'ensemble F_1 est clairement une partie de E car toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$. Elle ne contient par contre pas la fonction nulle car le polynôme correspondant est de degré $-\infty$. Ce n'est donc par un sous-espace vectoriel de E.*
2. *L'ensemble F_2 est clairement une partie de E. Il est évident que F_2 est non vide et qu'une combinaison linéaire de polynômes de degré $\leqslant n$ est encore un polynôme de degré $\leqslant n$ donc F_2 est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *Toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $F_3 \subset E$. F_3 est par ailleurs non vide et une combinaison linéaire de fonctions dérivables est encore dérivable donc F_3 est un sous-espace vectoriel de E.*
4. *Toute fonction k-lipschitzienne est continue (et même uniformément continue) sur $\mathbb{R}$ donc F_4 est bien une partie de E. Si on considère une fonction f_1 k_1-lipschitzienne et une fonction*

f_2 k_2-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$, on a, par application de l'inégalité triangulaire :

$$|(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) - (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x')| \leqslant (|\alpha_1| k_1 + |\alpha_2| k_2) |x - x'|$$

et donc $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est $|\alpha_1| k_1 + |\alpha_2| k_2$-lipschitzienne. F_4 est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

5. *La fonction nulle n'est pas élément de F_5 donc F_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*
6. *L'inclusion de F_6 dans E est évidente car toute fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$. F_6 est clairement non vide, la fonction identiquement nulle en est un élément. Par ailleurs, une combinaison linéaire de fonctions dérivables nulles en 0 est encore dérivable et nulle en 0 donc F_6 est bien un sous-espace vectoriel de E.*
7. *F_7 est non vide car la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$. Toute fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc F_7 est bien une partie de E. On vérifie de plus que toute combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle est encore $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle. F_7 est donc un sous-espace vectoriel de E.*
8. *La fonction identiquement nulle n'est pas solution de $y' - y = t$ donc F_8 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.*

Références