Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

21 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

1. $\left(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes\right)$ *où :*

$$\oplus : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (a,b) & \longmapsto & a \oplus b = ab \end{array}\right.$$

$$\otimes : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda,a) & \longmapsto & \lambda \otimes a = a^\lambda \end{array}\right.$$

2. $\left(R^2, \oplus, \otimes\right)$ *où :*

$$\oplus : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left((a,b), (a',b')\right) & \longmapsto & (a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b') \end{array}\right.$$

$$\otimes : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\lambda,(a,b)) & \longmapsto & \lambda \otimes (a,b) = (\lambda a, b) \end{array}\right.$$

Solution :

1. *Vérifions les différents axiomes.*
   (a) $\oplus$ *admet* 1 *comme élément neutre et si* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, *il est clair que* $a \oplus b^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$. *Donc* $\mathbb{R}_+^*$ *est un sous-groupe du groupe commutatif* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *et* $\left(\mathbb{R}_+^*, \oplus\right)$ *admet alors bien une structure de groupe commutatif.*
   (b) *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. *On vérifie que :*
      i. $(\alpha+\beta) \otimes x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x$
      ii. $(\alpha \times \beta) \otimes x = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$
      iii. $\alpha \otimes (x \oplus y) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha \otimes x \oplus \alpha \otimes y$.
      iv. $1 \otimes x = x^1 = x$.
2. *La loi externe n'est pas distributive. En effet* $(1+2) \otimes (1,2) = (3,2)$ *et* $1 \otimes (1,2) \oplus 2 \otimes (1,2) = (1,2) \oplus (2,2) = (3,4)$.

Références