

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

5 mai 2022

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels sur \mathbb{R} ?

1. $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ où :

$$\begin{aligned}\oplus : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (a, b) & \longmapsto a \oplus b = ab \end{cases} \\ \otimes : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (\lambda, a) & \longmapsto \lambda \otimes a = a^\lambda \end{cases}\end{aligned}$$

2. $(\mathbb{R}^2, \oplus, \otimes)$ où :

$$\begin{aligned}\oplus : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a, b), (a', b')) & \longmapsto (a, b) \oplus (a', b') = (a + a', b + b') \end{cases} \\ \otimes : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (a, b)) & \longmapsto \lambda \otimes (a, b) = (\lambda a, b) \end{cases}\end{aligned}$$

Solution :

1. Vérifions les différents axiomes.

(a) \oplus admet 1 comme élément neutre et si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, il est clair que $a \oplus b^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$. Donc \mathbb{R}_+^* est un sous-groupe du groupe commutatif (\mathbb{R}^*, \times) et (\mathbb{R}_+^*, \oplus) admet alors bien une structure de groupe commutatif.

(b) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On vérifie que :

i. $(\alpha + \beta) \otimes x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x$

ii. $(\alpha \times \beta) \otimes x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$

iii. $\alpha \otimes (x \oplus y) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha \otimes x \oplus \alpha \otimes y$.

iv. $1 \otimes x = x^1 = x$.

2. La loi externe n'est pas distributive. En effet $(1 + 2) \otimes (1, 2) = (3, 2)$ et $1 \otimes (1, 2) \oplus 2 \otimes (1, 2) = (1, 2) \oplus (2, 2) = (3, 4)$.

Références