Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On considère, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, le complexe $z = [1 - \sin\theta + i\cos\theta]^n$. Déterminer les réels θ tels que $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Solution : *En utilisant la factorisation par les angles moitiés (voir proposition* **??** *page* **??** *), on trouve :*

$$z = [1 + e^{i(\pi/2+\theta)}]^n = 2^n \cos^n(\pi/4 + \theta/2)e^{in(\pi/4+\theta/2)}$$

et donc :

$$\mathrm{Re}(z) = 2^n cos^n(\pi/4 + \theta/2)\cos(n\pi/4 + n\theta/2)$$

Par suite : $\mathrm{Re}(z) = 0$ *si et seulement si* $\boxed{\theta = 2k\pi + \pi/2}$ *ou* $\boxed{\theta = (2k+1)\pi/n - \pi/2}$ *où* $k \in \mathbb{Z}$.

Références