Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

25 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *Montrer que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

2. *En déduire la partie entière de*

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$$

Solution :

1. *On a :*

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

On montre de même que :

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. *On en déduit que*

$$\sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i+1} - \sqrt{i} < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < \sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i} - \sqrt{i-1}.$$

Mais les deux sommes extrêmes sont télescopiques et on trouve :

$$\sqrt{10001} - 1 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < \sqrt{10000}$$

Soit aussi :

$$99 < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right) < 100.$$

On en déduit que $\boxed{E\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)\right) = 99}$

Références