Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Emmanuel Vieillard-Baron[1], François Capaces[2], and Alain Soyeur[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Sous-groupes de*** $(\mathbb{R}, +)$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. L'objet de cet exercice est de montrer que G est soit discret dans $\mathbb{R}$ de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.*
2. *En déduire que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \geqslant 0$.*
3. *On suppose dans cette partie que $a > 0$.*
   (a) *Montrer que $a \in G$.*
   Indication 0.0 : On pourra faire un raisonnement par l'absurde en montrant que si a n'appartient pas à G alors il existe des éléments t_1 et t_2 de G tels que $a < t_2 < t_1 < 2a$ et en déduire une contradiction.
   (b) *Prouver que $G = a\mathbb{Z}$.*
4. *On suppose maintenant que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.*

Solution :

1. *Comme G n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe $x \in G$ tel que $x \neq 0$. Si x est positif, il est clair que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. Sinon, si x est négatif, G étant un groupe, $-x$ est élément de G et est positif. Pas suite, $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.*
2. *$G \cap \mathbb{R}_+^*$ est donc une partie non vide de $\mathbb{R}$. Elle est minorée par 0. En appliquant l'axiome de la borne supérieure, elle admet une borne inférieure $a \geqslant 0$.*
3. (a) *Supposons que a n'est pas élément de G. En appliquant la propriété de caractérisation de la borne inférieure, il existe t_1, $t_2 \in G$ tels que $0 < a < t_2 < t_1 < 2a$. Mais alors $0 < t_1 - t_2 < a$ car $t_1 > 0$. De plus, $t_1 - t_2 \in G$. Donc a ne peut alors être la borne inférieure de G ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ. a est donc nécessairement élément de G.*
   (b) *a étant élément de G, il est clair que $a\mathbb{Z} \subset G$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $x \in G$. Quitte à considérer $-x$ plutôt que x, on peut supposer que x est positif. D'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n.a > x$. Notons n_0 le plus*

petit entier vérifiant cette propriété. On a : $(n_0 - 1).a \leqslant x < n_0.a$ *ce qui amène :* $0 \leqslant x - (n_0 - 1).a \leqslant a$*. Mais alors* $x - (n_0 - 1).a$ *est un élément positif de* G *plus petit que* a*. Comme* a *est la borne inférieure de* G*, ceci n'est possible que si* $x - (n_0 - 1).a = 0$ *c'est-à-dire que si* $x = (n_0 - 1).a$*. On prouve ainsi que* $G \subset a\mathbb{Z}$*. Finalement :* $G = a\mathbb{Z}$*.*

4. *Soit* $x < y \in \mathbb{R}$*. Il faut montrer que* $[x, y] \cap G \neq \varnothing$*. Comme précédemment, on peut supposer que* x *est positif. Posons :* $\varepsilon = y - x > 0$*. D'après la propriété de caractérisation de la borne inférieure, il existe* $g \in G$ *tel que* $0 < g \leqslant \varepsilon$*. Il existe un couple* $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ *tel que :* $y = qg + r$ *et* $0 \leqslant r < g$*. Donc* $x = y - (y - x) = y - \varepsilon \leqslant y - g \leqslant y - r \leqslant qg \leqslant y$*. Donc* $qg \in [x, y]$ *et comme* $qg \in G$*,* G *est dense dans* $\mathbb{R}$*.*

Références