Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Emmanuel Vieillard-Baron[1], François Capaces[2], and Alain Soyeur[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

[2], ,

[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Sous-groupes de*** $(\mathbb{R}, +)$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. L'objet de cet exercice est de montrer que G est soit discret dans $\mathbb{R}$ de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.*
2. *En déduire que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \geqslant 0$.*
3. *On suppose dans cette partie que $a > 0$.*
   (a) *Montrer que $a \in G$.*
   Indication 0.0 : On pourra faire un raisonnement par l'absurde en montrant que si a n'appartient pas à G alors il existe des éléments t_1 et t_2 de G tels que $a < t_2 < t_1 < 2a$ et en déduire une contradiction.
   (b) *Prouver que $G = a\mathbb{Z}$.*
4. *On suppose maintenant que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.*

Références