Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Emmanuel Vieillard-Baron¹, François Capaces², and Alain Soyeur³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

², ,

³Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ **Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$**

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. L'objet de cet exercice est de montrer que G est soit discret dans $\mathbb{R}$ de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.
2. En déduire que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \geq 0$.
3. On suppose dans cette partie que $a > 0$.

(a) Montrer que $a \in G$.

Indication 0.0 : On pourra faire un raisonnement par l'absurde en montrant que si a n'appartient pas à G alors il existe des éléments t_1 et t_2 de G tels que $a < t_2 < t_1 < 2a$ et en déduire une contradiction.

(b) Prouver que $G = a\mathbb{Z}$.

4. On suppose maintenant que $a = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Références