Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R}+ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction non-nulle vérifiant :

$$(\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(\star\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

1. *Montrez que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.*
2. *Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.*
3. *Montrez que $\forall r \in \mathbb{Q}+$, $f(r) = r$.*
4. *Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}+$, $f(x) \geqslant 0$.*
5. *Montrez que f est une fonction croissante.*
6. *Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}+$, $f(x) = x$. (On raisonnera par l'absurde, en supposant par exemple que $x < f(x)$ et on introduira un rationnel r tel que $x < r < f(x)$).*

Solution :

1. *Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe $\alpha \in \mathbb{R}+$ tel que $f(\alpha) \neq 0$. Alors, puisque*

$$f(\alpha) = f(1.\alpha) = f(1).f(\alpha)$$

on en déduit que

$$f(\alpha)\,[f(1) - 1] = 0$$

et puisque $f(\alpha) \neq 0$, on obtient que $f(1) = 1$.
Puisque d'après $(\star)$,

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$$

on obtient que $f(0) = 0$.

2. *Montrons la propriété par récurrence sur n.*

$$\mathcal{P}(n) : f(n) = n$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après a).
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: en utilisant $(\star)$ et $\mathcal{P}(n)$:

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) + 1 = n + 1$$

3. *Soit $r \in \mathbb{Q}+$. Il existe $(p, q) \in \mathbb{Q}2$ ($p \geqslant 0$, $q > 0$) tels que*

$$r = \frac{p}{q}$$

Alors, en utilisant $(\star\star)$:

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(q).f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = p$$

On en tire donc que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$$

4. *Soit $x \in \mathbb{R}+$. Écrivons en utilisant $(\star\star)$:*

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}.\sqrt{x}\right) = \left[f\left(\sqrt{x}\right)\right]^2 \geqslant 0$$

5. *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}+^2$, tels que $x \leqslant y$. Comme $y - x \geqslant 0$, d'après d), on en déduit que*

$$f(y - x) \geqslant 0$$

et d'après $(\star)$ que

$$f(y) = f(y - x + x) = f(y - x) + f(x) \geqslant f(x)$$

Donc f est croissante.

6. *Par l'absurde, si $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}+}$, il existerait $x \in \mathbb{R}+$ tel que $f(x) \neq x$. Distinguons les deux cas possibles :*

   (a) *$x < f(x)$: Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ vérifiant*

   $$x < r < f(x)$$

   Comme d'après c), $f(r) = r$, on aurait puisque f est croissante :

   $$f(x) \leqslant f(r)$$

   et donc

   $$x < r < f(x) \leqslant f(r) = r$$

   ce qui est absurde.

   (b) *$f(x) < x$: ce cas se traite de la même façon.*

Références