

Pas de titre

Alain Soyeur¹, Emmanuel Vieillard-Baron², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

³, ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

On définit la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} |x| & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ |x| + 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

Déterminez $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Solution : Montrons que 0 est la borne inférieure de $\text{Im } f$.

— 0 est clairement un minorant de $\text{Im } f$.

— Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} , il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $0 < x < \varepsilon$ et $f(x) = |x| = x$. Donc $x \in \text{Im } f$.

On applique alors la propriété de caractérisation de la borne inférieure et $0 = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

Références