Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une partie $A \subset \mathbb{R}$ *non-vide. On suppose qu'il existe* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $\forall x \in A$, $0 < \alpha \leqslant x \leqslant \beta$. *Montrer que la partie* $A' = \{\frac{1}{x};\ x \in A\}$ *possède une borne supérieure et une borne inférieure et exprimer* $\sup A'$, $\inf A'$ *en fonction de* $\sup A$ *et* $\inf A$.

Solution : *On vérifie que* A' *est majorée par* $1/\alpha$ *et minorée par* $1/\beta$, *donc* $\sup A'$ *et* $\inf A'$ *existent. Montrons que* $\sup A' = 1/\inf A$.

— $\sup A' \leqslant \dfrac{1}{\inf A}$. *Soit* $y \in A'$, *il existe* $x \in A$ *tel que* $y = \dfrac{1}{x}$. *Puisque* $x \geqslant \sup A$, $y \leqslant \dfrac{1}{\inf A}$. *Par passage à la borne supérieure, on en déduit que* $\sup A' \leqslant 1/\inf A$.

— $\sup A' \geqslant \dfrac{1}{\inf A}$. *Montrons que* $\inf A \geqslant \dfrac{1}{\sup A'}$. *Soit* $x \in A$. *Écrivons* $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$. *Puisque* $1/x \in A'$, *on a* $1/x \leqslant \sup A'$ *et donc* $x \geqslant \dfrac{1}{\sup A'}$. *Par passage à la borne inférieure,* $\inf A \geqslant \dfrac{1}{\sup A'}$.

On montre de la même façon que $\inf A' = \dfrac{1}{\sup A}$.

Références