Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux parties de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ *et* $B \subset \mathbb{R}$ *non-vides et majorées. Montrez que* $\sup(A \cup B)$ *existe et l'exprimer en fonction de* $\sup A$ *et* $\sup B$.

Solution : $A \cup B$ *est une partie de* $\mathbb{R}$ *non-vide. Montrons qu'elle est majorée. Puisque* A *est majorée, il existe* $M_A \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall a \in A$, $a \leqslant M_A$. *De même, il existe* $M_B \in \mathbb{R}$ *un majorant de* B. *Posons alors* $M = \max(M_A, M_B)$. *Alors si* $x \in A \cup B$, $x \leqslant M$. *En effet, si* $x \in A$, $x \leqslant M_A \leqslant M$ *et si* $x \in B$, $x \leqslant M_B \leqslant M$.

Montrons que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

On suppose que $\sup A \leqslant \sup B$. *Montrons alors que* $\sup(A \cup B) = \sup B$. *Utilisons pour cela la propriété de caractérisation de la borne supérieure :*

1. $\sup B$ *est un majorant de* $A \cup B$ *: Soit* $x \in A \cup B$ *: Si* $x \in B$, *alors* $x \leqslant \sup B$. *Si* $x \in A$, $x \leqslant \sup A \leqslant \sup B$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. *En utilisant la caractérisation de* $\sup B$, *il existe* $x_\varepsilon \in B$ *tel que*

$$\sup B - \varepsilon \leqslant x_\varepsilon \leqslant \sup B$$

Et $x_\varepsilon \in A \cup B$. *On montre ainsi que* $\sup B$ *est la borne supérieure de* $A \cup B$.

Si $\sup B \leqslant \sup A$, *on montre de la même façon que* $\sup A \cup B = \sup A$. *En résumé, on a :* $\boxed{\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)}$.

Références