Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], François Capaces[2], and Alain Soyeur[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

9 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et deux applications bornées $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrez que :

$$\left|\sup_{x\in I} f(x) - \sup_{x\in I} g(x)\right| \leqslant \sup_{x\in I} \left| f(x) - g(x) \right|$$

Indication 0.0 : *Montrez que $\sup\limits_I f - \sup\limits_I g \leqslant \sup\limits_I |f-g|$ et dans un deuxième temps que $\sup\limits_I g - \sup\limits_I f \leqslant \sup\limits_I |f-g|$.*

Soit $x \in I$, écrire $f(x) = f(x) - g(x) + g(x)$ et majorer $f(x) \leqslant |f(x) - g(x)| + g(x)$. Utiliser ensuite le raisonnement de passage à la borne supérieure.

Solution : *Soit $x \in I$. Majorons :*

$$f(x) = f(x) - g(x) + g(x) \leqslant |(f(x) - g(x)) + g(x)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x)| \leqslant \sup_I |(f-g)| + \sup_I |g|$$

Comme le membre de droite est un majorant indépendant de x, par passage à la borne sup, on en déduit que

$$\sup_I f \leqslant \sup_I |(f-g)| + \sup_I |g|$$

En écrivant de même

$$g(x) = g(x) - f(x) + f(x) \leqslant |f(x) - g(x)| + |f(x)| \leqslant \sup_I |(f-g)| + \sup_I |f|$$

on en déduit par passage à la borne supérieure que

$$\sup_I g \leqslant \sup_I |(f-g)| + \sup_I |f|$$

et alors $\left|\sup_{x\in I} f(x) - \sup_{x\in I} g(x)\right| \leqslant \sup_{x\in I} \left| f(x) - g(x) \right|$.

Références