Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], François Capaces[2], and Alain Soyeur[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

9 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \ \mid \ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Déterminer $\sup A$ *et* $\inf A$.

Indication 0.0 : *Faire un dessin représentant les points de A.*

Solution :

$$A = \left\{ 0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \right\}.$$

On montre facilement que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}.$$

En effet, c'est un majorant de A qui appartient à A.

Montrons que $\inf A = -1$ en utilisant la propriété de caractérisation de la borne supérieure :

1. *-1 est un minorant de A : Soit $n \in \mathbb{N}*$, on a $(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1$.*
2. *Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n est impair et $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. Posons $x_\varepsilon = (-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n}$. On a bien $x_\varepsilon \in A$ et $-1 \leqslant x_\varepsilon \leqslant -1 + \varepsilon$.*

Références