

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, François Capaces², and Alain Soyeur³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

², ,

³Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère la partie de \mathbb{R} suivante :

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Indication 0.0 : Faire un dessin représentant les points de A .

Solution :

$$A = \left\{ 0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \right\}.$$

On montre facilement que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}.$$

En effet, c'est un majorant de A qui appartient à A .

Montrons que $\inf A = -1$ en utilisant la propriété de caractérisation de la borne supérieure :

1. -1 est un minorant de A : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(-1)^n + \frac{1}{n} \geq (-1)^n \geq -1$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n est impair et $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Posons $x_\varepsilon = (-1)^n + \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{n}$.
On a bien $x_\varepsilon \in A$ et $-1 \leq x_\varepsilon \leq -1 + \varepsilon$.

Références