Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 juillet 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin kx$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^n \dfrac{\cos kx}{\cos^k x}$ *(avec $x \neq \pi/2\ [\pi]$).*
4. $S_4 = \sum_{k=0}^n \dfrac{\sin kx}{\cos^k x}$ *(avec $x \neq \pi/2\ [\pi]$).*

Solution : *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Remarquons que d'après la formule du binôme de Newton et en factorisant par les angles moitiés :*

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \left(1 + e^{ix}\right)^n = e^{i\frac{nx}{2}} \left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{\frac{-ix}{2}}\right)^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} e^{i\frac{nx}{2}}.$$

Mais $S_1 = \operatorname{Re}(S) = \boxed{2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}}$.

2. *Et* $S_2 = \operatorname{Im}(S) = \boxed{2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}}$.

3. *Calculons*

$$S' = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k = \begin{cases} \dfrac{1 - \left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{e^{ix}}{\cos x}} & \text{si } x \neq 0\ [\pi] \\ n+1 & \text{si } x = 0\ [\pi] \end{cases}$$

car on a reconnu une somme géométrique de raison $\dfrac{e^{ix}}{\cos x}$. Or cette quantité est égale à 1 si *et seulement si* $x = 0\ [\pi]$. *Si* $x \neq 0\ [\pi]$ *alors*

$$\frac{1-\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\cos x}} = \frac{1}{\cos^n x}\frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}} = \frac{1}{\cos^n x}\frac{\left(\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}\right)\left(\cos x - e^{-ix}\right)}{\cos^2 x - \cos x\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)+1} =$$

$$\frac{1}{\cos^n x}\frac{\left(\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}\right)\left(\cos x - e^{-ix}\right)}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^n x}\left(\left(\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}\right) i \sin x\right) =$$

$$\frac{1}{\sin x \cos^n x}\left(\sin (n+1) x + i\left(\cos^{n+1} x - \cos (n+1) x\right)\right)$$

Comme $S_3 = \operatorname{Re}(S')$, *il vient que* $\boxed{S_3 = n+1}$ *si* $x = 0\,[\pi]$ *et que* $\boxed{S_3 = \dfrac{\sin (n+1) x}{\sin x \cos^n x}}$ *sinon.*

4. *De même* $\boxed{S_4 = \operatorname{Im}(S') = 0}$ *si* $x = 0\,[\pi]$ *et* $\boxed{S_4 = \dfrac{\cos^{n+1} x - \cos (n+1) x}{\sin x \cos^n x}}$ *sinon.*

Références