

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

14 octobre 2022

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos kx$

2. $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin kx$

3. $S_3 = \sum_{k=0}^n \frac{\cos kx}{\cos^k x}$ (avec $x \neq \pi/2 \pmod{\pi}$).

4. $S_4 = \sum_{k=0}^n \frac{\sin kx}{\cos^k x}$ (avec $x \neq \pi/2 \pmod{\pi}$).

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Remarquons que d'après la formule du binôme de Newton et en factorisant par les angles moitiés :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n = e^{i\frac{nx}{2}} \left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}} \right)^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} e^{i\frac{nx}{2}}.$$

Mais $S_1 = \operatorname{Re}(S) = \boxed{2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}}$.

2. Et $S_2 = \operatorname{Im}(S) = \boxed{2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}}$.

3. Calculons

$$S' = \sum_{k=0}^n \frac{e^{ikx}}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^k = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} & \text{si } x \neq 0 \pmod{\pi} \\ n + 1 & \text{si } x = 0 \pmod{\pi} \end{cases}$$

car on a reconnu une somme géométrique de raison $\frac{e^{ix}}{\cos x}$. Or cette quantité est égale à 1 si

et seulement si $x = 0 \ [\pi]$. Si $x \neq 0 \ [\pi]$ alors

$$\begin{aligned} \frac{1 - \left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{e^{ix}}{\cos x}} &= \frac{1}{\cos^n x} \frac{\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}}{\cos x - e^{ix}} = \frac{1}{\cos^n x} \frac{(\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x})(\cos x - e^{-ix})}{\cos^2 x - \cos x (e^{ix} + e^{-ix}) + 1} = \\ &= \frac{1}{\cos^n x} \frac{(\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x})(\cos x - e^{-ix})}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^n x} \left((\cos^{n+1} x - e^{i(n+1)x}) i \sin x \right) = \\ &= \frac{1}{\sin x \cos^n x} (\sin(n+1)x + i(\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x)) \end{aligned}$$

Comme $S_3 = \operatorname{Re}(S')$, il vient que $S_3 = n+1$ si $x = 0 \ [\pi]$ et que $S_3 = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$ sinon.

4. De même $S_4 = \operatorname{Im}(S') = 0$ si $x = 0 \ [\pi]$ et $S_4 = \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$ sinon.

Références