Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère la partie de $\mathbb{R}$ *suivante :*

$$A = \left\{ \frac{x^2+2}{x^2+1} \ \mid \ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Déterminer, s'ils existent, $\sup A, \inf A, \min A, \max A$.

Solution : *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On écrit :*

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

Alors on obtient immédiatement que A *est minorée par* 1*. Soit* $\varepsilon > 0$*. Il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $\frac{1}{x^2+1} \leqslant \varepsilon$*. Il suffit en effet de choisir* $x \geqslant \sqrt{1/\varepsilon - 1}$ *si* $\varepsilon \leqslant 1$ *et* $x = 0$ *si* $\varepsilon > 1$*. Alors*

$$1 \leqslant \frac{x^2+2}{x^2+1} \leqslant 1 + \varepsilon$$

et par conséquent, $\inf A = 1$*. De plus* A *ne possède pas de plus petit élément car* $\inf A \notin A$*. En effet, si* $1 \in A$ *alors il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x^2 + 2 = x^2 + 1$ *ce qui n'est pas le cas.*

Majorons ensuite pour $x \in \mathbb{R}$*,*

$$1 + \frac{1}{x^2+1} \leqslant 1 + 1 \leqslant 2$$

(on a minoré le dénominateur car $x^2 \geqslant 0$*). Par conséquent,* A *possède une borne supérieure et c'est le plus grand élément de* A *(il suffit de prendre* $x = 0$*). En définitive,* $\sup A = \max A = 2$*.*

Références