Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit f une application croissante de $[0,1]$ dans lui-même. On considère l'ensemble

$$E = \{x \in [0,1],\ f(x) \geqslant x\}$$

1. *Montrer que E possède une borne supérieure b.*

2. *Montrer que $f(b) = b$.*

   Indication 0.0 : On pourra étudier les deux cas : $f(b) > b$ et $f(b) < b$)

Solution :

1. *E est une partie majorée de $\mathbb{R}$. En effet : $\forall x \in E, \quad x \leqslant 1$. E est une partie non vide de $\mathbb{R}$: $f(0) \geqslant 0$ donc $0 \in E$. Par l'axiome de la borne supérieure, on peut affirmer que E admet une borne supérieure b.*

2. — *Si $\boxed{f(b) > b}$ alors, comme f est croissante, $f(f(b)) \geqslant f(b)$ et donc $f(b) \in E$. Mais, comme $f(b) > b$ et que b est la borne supérieure de E, on aboutit à une contradiction. On ne peut donc avoir : $f(b) > b$.*

   — *Supposons maintenant que $\boxed{fb < b}$. Posons $\eta = b - f(b) > 0$. Comme b est la borne supérieure de E, il existe $c \in E$ tel que : $b - \eta < c < b$. Par conséquent : $f(c) \geqslant c > b - \eta = b - b + f(b) = f(b)$, c'est-à-dire $f(c) > f(b)$. Mais f est croissante et cette inégalité est impossible.*

   Par conséquent $f(b) = b$.

Références