

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

25 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Majorer et minorer pour $n \geq n_0$ (à déterminer), les suites suivantes par des suites de la forme $c.n^p$ (avec le même exposant pour la majoration et la minoration).

1. $u_n = \frac{2n^5 - n^4 + n^2 - 1}{n^2 + n - 1}$

2. $u_n = \frac{n^2 + (n^2 - 1)/(n + 1)}{n + (n^3 - 1)(n + 1)}$

Solution :

1. Pour $n \geq 1$, on a $n^5 - n^4 \geq 0$ et $n^2 - 1 \geq 0$ donc $2n^5 - n^4 + n^2 - 1 = n^5 + (n^5 - n^4) + (n^2 - 1) \geq n^5$. Par ailleurs, on a $-n^4 + n^2 \leq 0$ et donc $2n^5 - n^4 + n^2 - 1 \leq 2n^5$. On s'occupe maintenant du dénominateur. Si $n \geq 1$, $n - 1 \geq 0$ et $n^2 + n - 1 \geq n^2$. De même, si $n \geq 1$, $n^2 \geq n$ et donc $n^2 + n - 1 \leq 2n^2 - 1 \leq 2n^2$. En conclusion, si $n \geq 1$:

$$\frac{n^3}{2} = \frac{n^5}{2n^2} \leq \frac{2n^5 - n^4 + n^2 - 1}{n^2 + n - 1} \leq \frac{2n^5}{n^2} = 2n^3.$$

2. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2 + n - 1}{n^4 + n^3 - 1}$. D'après la première question, si $n \geq 1$, on sait que $n^2 \leq n^2 + n - 1 \leq 2n^2$. On montre facilement que si $n \geq 1$, $n^4 \leq n^4 + n^3 - 1 \leq 2n^4$ donc il vient pour $n \geq 1$:

$$\frac{1}{2n^2} \leq \frac{n^2 + n - 1}{n^4 + n^3 - 1} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Références