Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], François Capaces[2], and Alain Soyeur[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Majorer et minorer pour $n \geqslant n_0$ (à déterminer), les suites suivantes par des suites de la forme $c.n^p$ (avec le même exposant pour la majoration et la minoration).

1. $u_n = \dfrac{2n^5 - n^4 + n^2 - 1}{n^2 + n - 1}$
2. $u_n = \dfrac{n^2 + (n^2-1)/(n+1)}{n + (n^3-1)(n+1)}$

Solution :

1. Pour $n \geqslant 1$, on a $n^5 - n^4 \geqslant 0$ et $n^2 - 1 \geqslant 0$ donc $2n^5 - n^4 + n^2 - 1 = n^5 + \left(n^5 - n^4\right) + \left(n^2 - 1\right) \geqslant n^5$. Par ailleurs, on a $-n^4 + n^2 \leqslant 0$ et donc $2n^5 - n^4 + n^2 - 1 \leqslant 2n^5$. On s'occupe maintenant du dénominateur. Si $n \geqslant 1$, $n - 1 \geqslant 0$ et $n^2 + n - 1 \geqslant n^2$. De même, si $n \geqslant 1$, $n^2 \geqslant n$ et donc $n^2 + n - 1 \leqslant 2n^2 - 1 \leqslant 2n^2$. En conclusion, si $n \geqslant 1$:

$$\frac{n^3}{2} = \frac{n^5}{2n^2} \leqslant \frac{2n^5 - n^4 + n^2 - 1}{n^2 + n - 1} \leqslant \frac{2n^5}{n^2} = 2n^3.$$

2. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2 + n - 1}{n^4 + n^3 - 1}$. D'après la première question, si $n \geqslant 1$, on sait que $n^2 \leqslant n^2 + n - 1 \leqslant 2n^2$. On montre facilement que si $n \geqslant 1$, $n^4 \leqslant n^4 + n^3 - 1 \leqslant 2n^4$ donc il vient pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{2n^2} \leqslant \frac{n^2 + n - 1}{n^4 + n^3 - 1} \leqslant \frac{2}{n^2}.$$

Références