Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrer que :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$. *Étudier dans quel cas on a égalité.*
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$.

Indication 0.0 : *Aidez-vous de la preuve de l'inégalité triangulaire page* **??**.

Solution :

1. *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$. *On a :*

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b \geqslant a + b$$

et donc $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$. *On a égalité si et seulement si* $\sqrt{ab} = 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* a *ou* b *est nul.*

2. *Soient* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. *En utilisant la première inégalité, on trouve que :*

$$\sqrt{|a|} = \sqrt{|a-b+b|} \leqslant \sqrt{|a-b| + |b|} \leqslant \sqrt{|a-b|} - \sqrt{|b|}$$

donc $\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|} \leqslant \sqrt{|a-b|}$. *On montre de même que* $\sqrt{|b|} \leqslant \sqrt{|a-b|} - \sqrt{|a|}$ *et on en déduit que* $\sqrt{|b|} - \sqrt{|a|} \leqslant \sqrt{|a-b|}$. *En résumé :* $\left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right| \leqslant \sqrt{|a-b|}$

Références