Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, François Capaces², and Alain Soyeur³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

², ,

³Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n réels strictement positifs. Montrer que

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1}) \geq n^2$$

Indication 0.0 : On montrera au préalable que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$x + 1/x \geq 2 \iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x - 1)^2 \geq 0$$

et donc on a toujours $x + 1/x \geq 2$. Par ailleurs :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \right) + n$$

La somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i/x_j + x_j/x_i)$ contient $n^2/2 - n$ termes et d'après l'inégalité précédente, on peut affirmer que chacun de ces termes est ≥ 2 . Il vient donc :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1}) \geq 2 \left(\frac{n^2}{2} - n \right) + n = n^2 - n \geq n^2$$

Références