Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

18 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient x_1, x_2, ..., x_n, n réels strictement positifs. Montrer que

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}\right) \geqslant n^2$$

Indication 0.0 : *On montrera au préalable que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Solution : *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :*

$$x + 1/x \geqslant 2 \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \iff (x-1)^2 \geqslant 0$$

et donc on a toujours $x + 1/x \geqslant 2$. Par ailleurs :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}\right) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) + n$$

La somme $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i/x_j + x_j/x_i)$ contient $n^2/2 - n$ termes et d'après l'inégalité précédente, on peut affirmer que chacun de ces termes est $\geqslant 2$. Il vient donc :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(x_1^{-1} + x_2^{-1} + ... + x_n^{-1}\right) \geqslant 2\left(\frac{n^2}{2} - n\right) + n = n^2 - n \geqslant n^2$$

Références