Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une vraie ellipse $\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & a\cos t \\ y(t) & = & a\sin t \end{array}\right.$, $a^2 \neq b^2$. *Démontrer que quatre points* $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ *sont cocycliques si et seulement si leurs paramètres* $(t_k)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ *vérifient* $t_1+t_2+t_3+t_4 \equiv 0[2\pi]$ *(passer en* e^{it}*).*

Solution : *Une intersection se détermine simplement lorsqu'un ensemble est déterminé par une équation cartésienne et l'autre en paramétrique. Ici cela fournit la solution. On considère un cercle d'équation* $x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma = 0$ *qui coupe l'ellipse en quatre points* $M_i(a\cos t_k, b\sin t_k)$ *qui vérifient* $a^2\cos^2 t_k + b^2\sin^2 t_k + 2a\alpha\cos t_k + 2b\beta\sin t_k + \gamma = 0$. *Soit*

$$a^2\frac{e^{2it_k}+2+e^{-2it_k}}{4} - b^2\frac{e^{2it_k}-2+e^{-2it_k}}{4} + 2a\alpha\frac{e^{it_k}+e^{-2it_k}}{2} + 2b\beta\frac{e^{it_k}-e^{-2it_k}}{2i} + \gamma = 0.$$

En multipliant par e^{2it_k} *:*

$$\frac{a^2-b^2}{4}e^{4it_k} + (a\alpha - ib\beta)e^{3it_k} + \frac{a^2+b^2}{2}e^{2it_k} + (a\alpha+ib\beta)e^{it_k} + \frac{a^2-b^2}{4} = 0.$$

Donc les e^{it_k} *sont des racines distinctes du polynôme :* $\dfrac{a^2-b^2}{4}X^4 + (a\alpha - ib\beta)X^3 + \dfrac{a^2+b^2}{2}X^2 + (a\alpha+ib\beta)X + \dfrac{a^2-b^2}{4}$. *Le produit des racines vaut d'une part* $\exp\left(i\left(t_1+t_2+t_3+t_4\right)\right)$ *et d'autre part* $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{4}}{\frac{a^2-b^2}{4}} = 1$. *D'où le résultat.*

Références