Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}.$$

Solution : *Il est clair que les racines cubiques de l'unité 1, j et j^2 sont un triplet de solutions.*
Soient trois complexes (z_1, z_2, z_3) vérifiant les conditions. Ils sont racines du polynôme

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)X - z_1 z_2 z_3 = 0.$$

Mais puisque $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, et que $z_1 z_2 z_3 = 1$,

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} = \overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0.$$

Par conséquent, les complexes z_1, z_2, z_3 sont racines du polynôme $P(X) = X^3 - 1$. Ce sont donc les racines cubiques de l'unité : $\{z_1, z_2, z_3\} = \{1, j, j^2\}$.
Sinon, en considérant les points M_k d'affixes respectives z_k, l'égalité $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ se traduit par O est le centre de gravité de $M_1 M_2 M_3$. Comme on a $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, O est aussi le centre du cercle circonscrit. Les médianes sont donc aussi médiatrices, donc $M_1 M_2 M_3$ est équilatéral. Quitte à changer la numérotation, il existe α tel que $z_k = \exp\left(i\alpha + \frac{2ik\pi}{3}\right)$. La troisième égalité $z_1 z_2 z_3 = 1$ dit alors que $\alpha^3 = 1$ ce qu'il fallait vérifier.

Références