Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Calculer la somme

$$S = \sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$$

Solution : *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ *et donc, d'après les formules d'Euler :*

$$S = \sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{9}\right) = 2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\left(e^{\frac{2ik\pi}{9}} + e^{-\frac{2ik\pi}{9}}\right) = 2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8} e^{\frac{2ik\pi}{9}}$$

la dernière égalité étant conséquence du fait que

$$e^{-\frac{i2\pi}{9}} = e^{\frac{i2\times 8\times\pi}{9}},\ e^{-\frac{i2\times 2\times\pi}{9}} = e^{\frac{i2\times 7\pi}{9}},\ e^{-\frac{i2\times 3\times\pi}{9}} = e^{\frac{i2\times 6\pi}{9}} \quad \textit{et} \quad e^{-\frac{i2\times 4\times\pi}{9}} = e^{\frac{i2\times 5\times\pi}{9}}.$$

(Placer les racines neuvièmes de l'unité sur un dessin !). On trouve alors par application du cours :

$$S = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{8} e^{\frac{2ik\pi}{9}} = \boxed{\frac{7}{4}}.$$

Références