Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver $m \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme

$$P = X^3 + X^2 + mX + 6 \in \mathbb{C}[X]$$

possède deux racines x_1, x_2 vérifiant

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2.$$

Déterminer alors explicitement ces racines.

Solution : *Notons x_1, x_2, x_3 les racines de P. En écrivant les relations coefficients-racines, il vient que :*

$$x_1 + x_2 + x_3 = -1 \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m \quad x_1x_2x_3 = -6$$

En supposant que $x_1 + x_2 = x_1x_2$, de la deuxième et la troisième relation, on tire

$$(x_1 + x_2)x_3 = -6 \Rightarrow x_1x_2 = m + 6.$$

Mais de la première, on tire aussi

$$(-1 - x_3)x_3 = -6 \Rightarrow x_3^2 + x - 6 = 0$$

et par conséquent, l'une des racines de P doit être égale à 2 ou alors à -3. Etudions les deux cas :

- *$x_3 = 2$: comme $P(2) = 0$, $m = -9$ et alors $P = (X-2)(X^2 + 3X - 3)$. Alors comme x_1, x_2 sont les racines du trinôme $X^2 + 3X - 3$, $x_1x_2 = -3$ et $x_1 + x_2 = -3$ conviennent.*
- *$x_3 = -3$: comme $P(-3) = 0$, $m = -4$ et alors $P = (X+3)(X^2 - 2X + 2)$ et dans ce cas, $x_1x_2 = 2$, $x_1 + x_2 = 2$ conviennent également.*

En conclusion, $\boxed{m = -9}$ ou $\boxed{m = -4}$.

Références