Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $P = X^3 + X - 1 \in \mathbb{C}[X]$. On note x_k avec $k \in [\![1,3]\!]$ ses trois racines complexes.

1. *Vérifier (sans chercher à les calculer) que les trois racines sont distinctes.*
2. *Effectuer la division euclidienne de X^5 par P.*
3. *En déduire la valeur de*

$$S = \sum_{k=1}^{3} x_k^5.$$

Solution :

1. *Par l'absurde, si x est une racine double de P, alors $P(x) = P'(x) = 0$. Mais $P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{i}{\sqrt{3}}$, qui ne sont pas des racines de P. Donc toutes les racines complexes de P sont simples.*
2. *On trouve que $X^5 = (X^2 - 1)P(X) + X^2 + X - 1$.*
3. *Si x_k est une racine de P, alors $x_k^5 = (x_k^2 - 1)P(x_k) + x_k^2 + x_k - 1 = x_k^2 + x_k - 1$. On peut alors exprimer la somme cherchée en fonction des fonctions symétriques élémentaires des racines de P. Si $\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et si $\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$ alors*

$$S = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 + \sigma_1 - 3 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1 - 3 = -2 - 3 = \boxed{-5}.$$

Références