Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^4 - X^3 - 7X^2 + X + 6$ sachant qu'il possède deux racines dont la somme est 0.

Solution : *Notons $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les racines de P et supposons que $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. Écrivons les relations coefficients racines pour P :*

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = -7 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -1 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 6 \end{cases}$$

De la première, on tire que $\alpha_3 + \alpha_4 = 1$. La seconde se re-écrit $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = -7$ et il vient que $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 = -7$. La troisième équivaut à $\alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 + \alpha_2) = -1$ et donc on a $\alpha_1\alpha_2 = -1$. Comme les réels α_1, α_2 satisfont le système

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 = -1 \end{cases}$$

ce sont les racines du trinôme $X^2 - 1$. Donc on a par exemple $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = -1$. Il vient alors que α_3, α_4 satisfont le système

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 & = 1 \\ \alpha_3\alpha_4 = -6 \end{cases}$$

ce sont les racines du trinôme $X^2 - X - 6 = (X - 3)(X + 2)$. Donc $\alpha_3 = 3$ et $\alpha_4 = -2$. Les racines de P sont alors : $\boxed{-2, -1, 1, 3}$.

Références