Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $P(X) = X^3 + 2X^2 - 7X + \lambda \in \mathbb{C}[X]$. Trouver λ pour que le carré d'une racine de P soit égal à la somme des carrés des autres racines.

Solution : *Notons x_1, x_2, x_3 les trois racines de P. On suppose, quitte à les renuméroter, que $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. On écrit les relations coefficients racines :*

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -2 \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -7 \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3 = -\lambda.$$

Donc $2x_3^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 18$ et $x_3^2 = 9$. On trouve alors $\lambda = -24$ ou $\lambda = -12$. On vérifie que $\lambda = -24$ convient. En effet, dans ce cas les racines de P sont $x_3 = 3, x_1 = -5/2 + i\sqrt{7}/2$ et $x_2 = -5/2 - i\sqrt{7}/2$ et on a bien $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. Si $\lambda = -12$ alors les racines de P sont $x_3 = -3$ et $x_1 = 1/2 + \sqrt{17}/2$, $x_2 = 1/2 - \sqrt{17}/2$ et on n'a pas $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$. Donc seul $\boxed{\lambda = -24}$ convient.

Références