Théorème fondamental de l'algèbre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

9 mars 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Théorème fondamental de l'algèbre***

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, non constant, n'admettant aucune racine complexe. $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n, (a_n \neq 0, n \geqslant 1)$

1. *Démontrer que $a_0 \neq 0$.*
2. *On considère $f\ : z \longmapsto \dfrac{1}{|P(z)|}$.*
   - *Démontrez que $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| \geqslant |a_n|.|z|^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.|z|^k$.*
   - *Démontrez que $\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, M_\varepsilon > 0 : \quad |z| > M_\varepsilon \Longrightarrow f(z) < \varepsilon$.*
   - *Démontrez que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.*
3. *On pose $\varepsilon = f(0)$.*
   - *Démontrez que f est majorée sur $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant M_\varepsilon\}$. (*On pourra penser au théorème de Bolzano-Weierstrass au sein d'une démonstration par l'absurde.*)*
   - *Démontrez qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la borne supérieure des $f(z)$ pour $z \in D_\varepsilon$. (*On pourra penser au théorème de Bolzano-Weierstrass *).*
   - *Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{C}$, et que $m = \sup_{z\in\mathbb{C}} f(z)$ existe.*
   - *Démontrez que $\exists\, z' \in \mathbb{C}, f(z') = m$. Déduisez-en que $m \neq 0$.*
4. *On pose $Q(z) = \dfrac{P(z+z')}{P(z')}$.*
   - *Démontrez que $\exists (b_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n : \quad Q(X) = 1 + b_1 X + \ldots + b_n X^n$ avec $b_n \neq 0$.*
   - *Démontrez que $\inf_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = 1$.*

5. *Soit p la valuation de $Q(X)-1$, c'est-à-dire le plus petit indice $k \geqslant 1$ tel que $b_k \neq 0$, et soit α une racine $p^{\text{ième}}$ de $-b_p$.*
   - *Démontrez que* $\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad 1 \leqslant |1-z^p| + \left| \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k \right|.$
   - *En prenant z réel dans $]0,1[$ et en faisant tendre z vers zéro, quel théorème avez-vous démontré ?*

Solution :

1. *On a $a_0 = P(0)$. Comme P n'a pas de racine, $a_0 \neq 0$.*
2.
   - *On a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = P(z) - a_n z^n$*, donc d'après l'inégalité triangulaire,* $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leqslant |P(z)| + |a_n||z|^n$.

     Donc $|P(z)| \geqslant |a_n||z|^n - \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \geqslant |a_n||z|^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k$.
   - *On pose, pour $r > 0$,* $g(r) = |a_n|r^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k = |a_n| r^n \left(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{r^{n-k}}\right)$.

     Comme $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{r^{n-k}} = 1$*, on a* $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} g(r) = +\infty$*. Donc* $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M_\varepsilon > 0, r > M_\varepsilon \Longrightarrow g(r) > \dfrac{1}{\varepsilon}$*. Et comme $f(z) \geqslant g(|z|)$, on a pour $|z| \geqslant M_\varepsilon, f(z) < \varepsilon$.*
   - *La démonstration est identique à celle de la propriété pour les fonctions (continues) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et les suites réelles. On remplace simplement les valeurs absolues $|\ |$ par des modules $|\ |$, c'est dire si ça ne se voit pas !*
3.
   - *Supposons que f ne soit pas majorée sur D_ε. Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, u_n \in D_\varepsilon, f(u_n) \geqslant n$. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ. On aurait alors $f(u_{n_k}) \geqslant n_k \geqslant k$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(u_{n_k}) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(u_{n_k}) = f(\ell)$. Contradiction.*
   - *L'ensemble $\{f(z) \mid z \in D_\varepsilon\}$ est non vide et majoré. Il admet donc une borne supérieure m. D'après la caractérisation de la borne supérieure, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in D_\varepsilon, m - \frac{1}{n} \leqslant f(u_n) \leqslant m$. Toujours d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers z'. On a alors $m - \frac{1}{k} \leqslant m - \frac{1}{n_k} \leqslant f(u_{n_k}) \leqslant m$. La limite de la suite $f(u_{n_k})$ est m d'après la propriété des gendarmes, et $f(z')$ d'après la question 2.*
   - *On a $\forall\, z \in D_\varepsilon, f(z) \leqslant m$ et $\forall\, z \notin D_\varepsilon, f(z) \leqslant \varepsilon = f(0) \leqslant m$. Donc m est un majorant de $\{f(z) \mid z \in \mathbb{C}\}$. C'est aussi la borne supérieure et le maximum puisque $m = f(z')$.*
   - *L'existence de z' a été vue plus haut. $m = 0$ voudrait dire que $\dfrac{1}{|P(z')|} = 0$ ce qui est impossible.*
4.
   - *Q est un polynôme de degré n qui vérifie $Q(0) = \dfrac{1}{P(z')} \times P(z') = 1$. D'où le résultat.*

— *On a* $\forall\, z \in \mathbb{C}, |Q(z)| = f(z') \times \dfrac{1}{f(z+z'} = m\dfrac{1}{f(z+z'} \geqslant \dfrac{m}{m} = 1$. *Comme* $|Q(z)| = 1$, *on a bien* $\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |Q(z)| = 1$.

5. — *On a donc* $Q\left(\frac{z}{\alpha}\right) = 1 + b_p\left(\frac{z}{\alpha}\right)^p + \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k = 1 - z^p + \left|\sum_{k=p+1}^{n} b_k \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k\right|$ *puisque* $b_p\left(\frac{z}{\alpha}\right)^p = b_p\dfrac{z^p}{\alpha^p} = b_p\dfrac{z^p}{-b_p} = -z^p$. *Il ne reste plus qu'à écrire* $1 \leqslant \left|Q\left(\frac{z}{\alpha}\right)\right| \leqslant |1 - z^p| + \left|\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} b_k \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k\right|$ *grâce à l'inégalité triangulaire.*

— *On prend* $z = t$ *réel dans* $]0,1[$, *on a* $|1 - t^p| = 1 - t^p$. *On a donc* $t^p \leqslant t^{p+1}\left|\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \frac{b_k}{\alpha^k} t^{k-p-1}\right|$,

puis $1 \leqslant t\left|\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} \frac{b_k}{\alpha^k} t^{k-p-1}\right|$. *On fait tendre* t *vers zéro pour obtenir* $1 \leqslant 0$.

L'hypothèse de départ, à savoir que P *n'admet aucune racine complexe est donc absurde.*

On a donc démontré par l'absurde le théorème fondamental de l'algèbre.

Références