Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

1. *On considère le polynôme $P = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à* ***coefficients entiers*** *tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$. On suppose que P admet une racine rationnelle $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $p \wedge q = 1$. Montrer que $p \mid a_0$ et que $q \mid a_n$.*
2. *En déduire une factorisation de $P = 2X^3 - X^2 - X - 3$ dans $\mathbb{C}$.*
3. *Vérifier si le polynôme $P = X^5 + 3X^2 + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?*
4. *Avec les notations de la première question, démontrer que $p - q \mid P(1)$ puis, sans effort, que $p + q \mid P(1)$.*
5. *Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $3X^4 - 19X^3 + 9X^2 - 19X + 6$.*

Voir aussi le paragraphe **??** *page* **??** *de l'annexe* **??**.

Solution :

1. *Comme $P\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$, il vient : $a_n \dfrac{p^n}{q^n} + \cdots + a_1 \dfrac{p}{q} + a_0 = 0$ ce qui amène :*

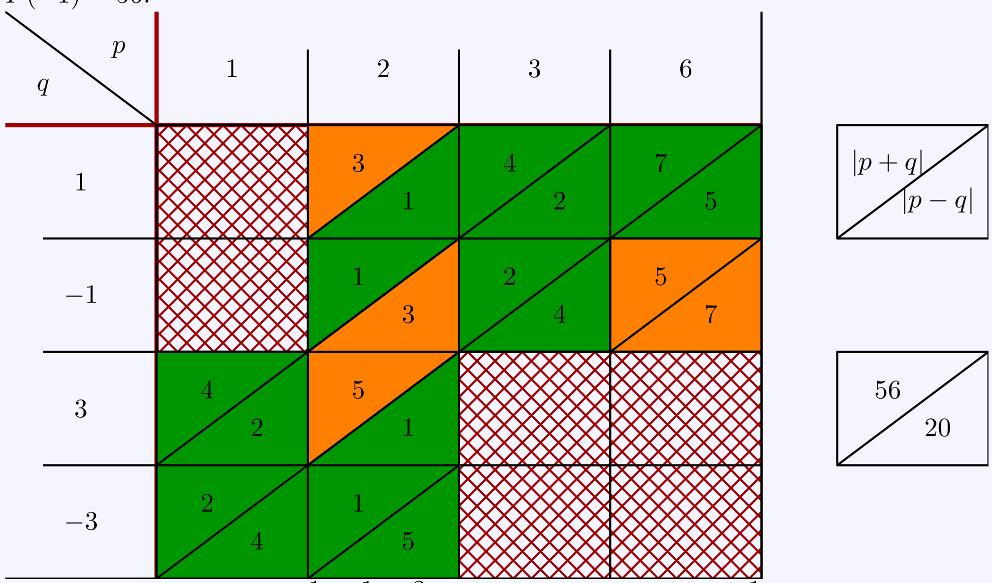
$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Comme $a_n p^n = -\left(a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n\right)$, q divise $a_n p^n$ et comme p et q sont premiers entre eux, q divise a_n. On montre de même que $p \mid a_0$.

2. *Le résultat prouvé dans la question précédente nous invite à vérifier si $3/2$ est une racine évidente de P, ce qui est le cas. On vérifie alors que $\boxed{P = (2X - 3)\left(X - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}$.*
3. *Si le polynôme P n'était pas irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, il aurait une racine $p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p \wedge q = 1$. Comme $p|2$ et $q|1$, cette racine doit être un des entiers relatifs : ± 2 ou ± 1. On vérifie qu'aucun de ces nombres n'est une racine de P. Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$*

4. *On écrit* $q^nP(1) = q^n\left(P(1) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right) = a_n(q^n - p^n) + a_{n-1}q\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right) + \dots a_kq^{n-k}\left(q^{k-1} - p^{k-1}\right) + \dots + a_1q^{n-1}(q-p)$.
Or $\forall k \in [\![1, n]\!], p - q$ *divise* $a_kq^{n-k}\left(q^{k-1} - p^{k-1}\right) = a_kq^{n-k}(q-p)\left(q^{k-2} + pq^{k-2} + \dots + p^{k-2}\right)$ *donc il divise leur somme* $q^nP(1)$.
Maintenant, q *est premier avec* $p - q$ *(Bézout, algorithme des différences ou tout ce que vous voudrez) donc* q^n *est premier avec* $p - q$*. Il est l'heure d'utiliser le lemme de Gauss :* $p - q$ *divise* $P(1)$.
Pour démontrer sans effort que $p+q \mid P(1)$*, on applique le résultat précédent à* $Q = P(-X)$.

5. *Comme il n'existe pas de méthode simple pour factoriser un polynôme de degré* 4 *un jour d'oral, il faut chercher les racines rationnelles : On a* $a_0 = 6$ *et* $a_n = 3$*.* $P(1) = -20$ *et* $P(-1) = 56$.



Les candidats sont donc $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 3, -3, 6$*. On trouve enfin* $\frac{1}{3}$ *et* 6*. Après division par* $(3X-1)(X-6)$ *on a* $3X^4 - 19X^3 + 9X^2 - 19X + 6 = \boxed{(3X-1)(X-6)(X^2+1)}$.
Remarque : Lorsqu'on programme la recherche des racines rationnelles, le raffinement avec $P(1)$ *et* $P(-1)$ *est inutile. Lorsqu'on travaille à la main, il n'est pas de trop.*

Références