Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soient deux polynômes $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer que* $(X-1) \mid P(X^k) \Rightarrow (X-1) \mid P$.
2. *Montrer que* $(X^2+X+1) \mid (P(X^3)+XQ(X^3)) \Rightarrow (X-1) \mid P$ *et* $(X-1) \mid Q$.

Solution :

1. *Si* $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, *alors* $P(X^k) = a_0 + a_1X^k + \cdots + a_nX^{nk}$. *Par conséquent, en notant* $Q = P(X^k)$, *si* $(X-1) \mid Q$, *alors* $Q(1) = P(1) = 0$. *Donc* $(X-1) \mid P$.
2. *En notant* $H = P(X^3) + XQ(X^3)$, *puisque* $X^2+X+1 = (X-j)(X-j^2)$, *on a* $H(j) = H(j^2) = 0$, *c'est-à-dire*
$$\begin{cases} P(1) + jQ(1) & = 0 \\ P(1) = j^2Q(1) & = 0 \end{cases}.$$
On en déduit que $P(1) = Q(1) = 0$, *c'est-à-dire que* $(X-1) \mid P$ *et que* $(X-1) \mid Q$.

Références