Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On pose

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad B = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad C = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

1. *En utilisant la trigonométrie, montrer que A vérifie une équation du second degré.*
2. *Exprimer A , B , C en utilisant des racines carrées.*

Solution :

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la formule* $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$*. Appliquée à $x = \pi/12$, il vient que* $\sin^2(\pi/12) = (1 - \cos(\pi/6))/2$*. Donc* $\sin(\pi/12)$ *est une solution de* $X^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)/4 = 0$*.*
2. *On résout cette équation. Ses deux solutions sont $X = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Comme* $\sin(\pi/12) > 0$*, il est clair que* $\boxed{\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$*. Pour calculer* $\cos(\pi/12)$*, on utilise alors la formule fondamentale de la trigonométrie et le fait que ce cosinus est positif. On trouve*

$$\cos(\pi/12) = \sqrt{1 - \sin^2(\pi/12)} = \sqrt{1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}.$$

Enfin, d'après la définition de la fonction tangente, il vient que :

$$\tan(\pi/12) = \frac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} = \boxed{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}}.$$

Références